Apuntes semana 11

Geometría analítica

Álgebra

Unidad 3: Números naturales y cónicas

Contenido

Introducción

La geometría analítica es una rama de las matemáticas que combina la geometría y el álgebra, permitiendo el estudio y análisis de figuras geométricas utilizando herramientas algebraicas. Esta disciplina revolucionó el campo de la geometría, al introducir un enfoque numérico y algebraico para describir y comprender las propiedades de los objetos geométricos en un sistema de coordenadas.

En la geometría analítica, los puntos en un plano o en el espacio se representan mediante pares o tríos ordenados de números, respectivamente. Estos números se conocen como coordenadas y se basan en un sistema de referencia, generalmente utilizando ejes cartesianos. Esto permite asociar cada punto con un conjunto de coordenadas numéricas, lo que facilita su localización precisa y su estudio algebraico.

Además, la geometría analítica proporciona herramientas para describir y analizar diferentes figuras geométricas, como líneas rectas, círculos, elipses y parábolas. Utilizando ecuaciones algebraicas, se pueden establecer propiedades geométricas de estas figuras y resolver problemas relacionados con ellas.

En este apunte, exploraremos los fundamentos de la geometría analítica, incluyendo la representación de puntos en un sistema de coordenadas, las ecuaciones de figuras geométricas y el estudio de sus propiedades. Se proporcionarán ejemplos ilustrativos y ejercicios prácticos, los que permitirán a los estudiantes aplicar estos conceptos en situaciones reales.

Ecuación de la circunferencia

Una circunferencia es el conjunto de puntos del plano que equidistan de un punto fijo, llamado centro, y dicha distancia común es denominada radio. La ecuación de la circunferencia describe la relación matemática entre los puntos de una circunferencia en un plano cartesiano.

Definición de centro.

En la ecuación de la circunferencia, el término (h,k) representa las coordenadas del centro de la circunferencia. El centro es el punto que se encuentra en el medio de la circunferencia y se puede pensar como el "corazón" de la figura. El valor h, se refiere a la coordenada horizontal del centro y k se refiere a la coordenada vertical del centro. Así, el punto (h,k) es el punto medio de la circunferencia; se puede trazar una línea recta desde este punto hasta cualquier punto de la circunferencia para obtener el radio.
La posición del centro en la ecuación de la circunferencia es importante, porque nos permite conocer la ubicación exacta de la figura en el plano cartesiano. Al cambiar las coordenadas del centro, podemos mover la circunferencia hacia arriba o hacia abajo, hacia la izquierda o hacia la derecha en el plano cartesiano, mientras que, al cambiar el radio, podemos hacer la circunferencia más grande o pequeña.

Definición de radio.

En la ecuación de la circunferencia, el término "r" representa el radio de la circunferencia. El radio es la distancia desde el centro de la circunferencia hasta cualquier punto de la circunferencia.

En términos matemáticos, la ecuación de la circunferencia establece que la suma de los cuadrados de las distancias desde el centro de la circunferencia a cualquier punto (x,y) en la circunferencia es igual al cuadrado del radio:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

Esta ecuación muestra que para cualquier punto (x,y) en la circunferencia, si se mide la distancia desde el punto al centro de la circunferencia y se eleva al cuadrado, la suma de los cuadrados de estas distancias siempre será igual al cuadrado del radio.
Por lo tanto, el radio determina la distancia que se extiende desde el centro de la circunferencia hasta su borde exterior. Cuanto mayor sea el valor de r en la ecuación de la circunferencia, más grande será la circunferencia, y cuanto menor sea el valor de r, más pequeña será la circunferencia.

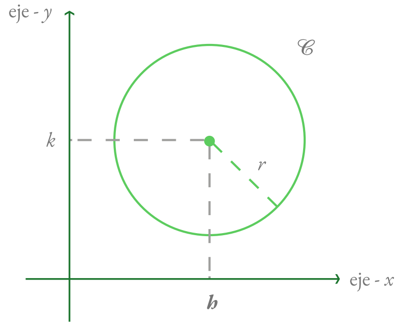


Figura 1: Representación de la circunferencia, en la que se observa su centro y radio. Elaboración propia.

Ecuación principal

La ecuación principal de la circunferencia es una forma especial de la ecuación de la circunferencia utilizada cuando el centro de la circunferencia está en el origen del sistema de coordenadas (0,0). La ecuación principal de la circunferencia se escribe de la siguiente manera:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

donde r es el radio de la circunferencia.

Esta ecuación nos dice que cualquier punto (x,y) en la circunferencia satisfará esta ecuación. La ecuación principal de la circunferencia es útil, porque es una forma más simple de la ecuación de la circunferencia general, lo que hace que sea más fácil de trabajar en algunos casos.

Además, la ecuación principal de la circunferencia tiene una forma geométrica clara. En el plano cartesiano, representa todos los puntos que se encuentran a una distancia r del origen, lo que forma una circunferencia con centro en el origen y radio r.

Ecuación general.

La forma general de la ecuación de la circunferencia es:

$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

donde (h,k) son las coordenadas del centro de la circunferencia y r es el radio de la circunferencia.

Esta ecuación nos dice que cualquier punto (x,y) que esté en la circunferencia satisfará esta ecuación. Es decir, si se sustituyen las coordenadas (x,y) en la ecuación, se obtendrá una afirmación verdadera que representa la pertenencia de ese punto a la circunferencia.

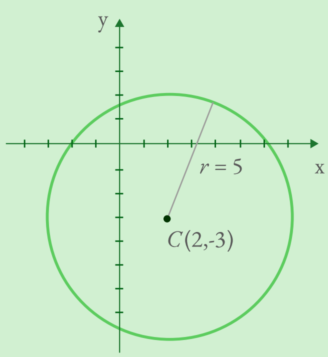
Por ejemplo, si queremos encontrar la ecuación de la circunferencia con centro en el punto $(2,3)$ y radio 4, sustituimos los valores correspondientes en la fórmula:

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 4^2$$

Esta ecuación representa todas las parejas (x, y) que cumplen esta ecuación y, por lo tanto, se encuentran en la circunferencia.

Ejemplo:
Halle la ecuación de la circunferencia con centro en $(2,-3)$ y radio (5).

Se sustituyen el centro y el radio en la ecuación y se transforma en su forma general.



$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

$$(x-2)^2 + (y-(-3)^2 = 5^2$$

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 5^2$$

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 25$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 = 25$$

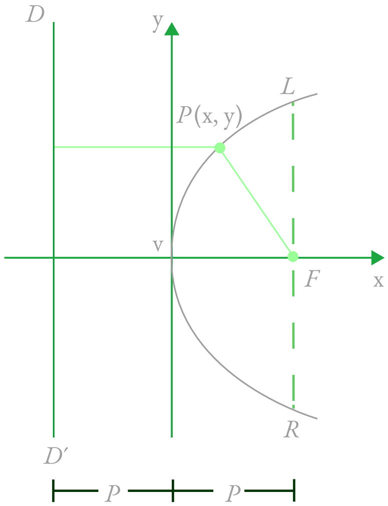
$$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 13 = 25$$

Se concluye que la ecuación general de la circunferencia es:

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 13 = 25$$

Ecuación de la parábola

Una parábola es el conjunto formado por todos los puntos que se encuentran a la misma distancia de un punto fijo, llamado foco, y de una recta, llamada **directriz** (Raichman, 2016).



$\overline{PF} = \overline{PD}$

Elementos:

V: vértice.

F: foco.

$D\,D'$: directriz.

LR: lado recto.

p: parametro distancia del vertice al foco.

Figura 2: Representación de la parábola y sus elementos. Elaboración propia basada en Márquez (2009).

La ecuación de la parábola es una expresión matemática que describe una curva en forma de U, llamada parábola. Esta ecuación se utiliza para representar la posición de la parábola en un plano cartesiano, lo que permite determinar sus propiedades geométricas como la ubicación del vértice, el foco y la directriz, así como la dirección en la que se abre la parábola.

La ecuación de la parábola puede tener diferentes formas, dependiendo del tipo de parábola, pero en su forma más común, llamada forma estándar, se expresa como:

y=〖(ax)〗^2+bx+c

donde a, b y c son constantes que determinan la posición y la forma de la parábola. La constante "a" determina si la parábola se abre hacia arriba o hacia abajo, mientras que las constantes "b" y "c" determinan la posición de la parábola en el plano.

La ecuación de la parábola es una herramienta útil para el análisis y la resolución de problemas en diversas áreas de las matemáticas, la física y la ingeniería, entre otras disciplinas.

Definición de vértice.

El vértice de una parábola es el punto donde la parábola cruza su eje de simetría. Si el coeficiente del término x 2 es positivo, el vértice será el punto más bajo en la gráfica, el punto en la parte baja de la forma "U". Si el coeficiente del término x 2 es negativo, el vértice será el punto más alto en la gráfica, el punto en la parte alta de la forma "U".

Definición de foco.

El foco es uno de los elementos importantes de la parábola. Este se define como un punto fijo que se encuentra en la simetría de la curva y que está ubicado en el eje de la parábola, a una distancia constante llamada distancia focal (f) del vértice.

En la ecuación de la parábola, el foco se representa por el punto:

$$(h + \left(\frac{1}{4a}\right)k)$$

si la parábola se abre hacia arriba o hacia abajo,
y por el punto:

$$(hk + \left(\frac{1}{4a}\right))$$

si la parábola se abre hacia la izquierda o hacia la derecha.
Aquí, (h,k) representa las coordenadas del vértice de la parábola.

Definición de directriz.

La directriz es otra de las características importantes de la parábola, que se define como una recta fija ubicada en la simetría de la curva, y que se encuentra a una distancia constante (p) del vértice, donde p es la distancia entre el vértice y la directriz.

En la ecuación de la parábola, la directriz se representa por la recta:

$$y = k + \left(\frac{1}{4a}\right)$$

Si la parábola se abre hacia arriba o hacia abajo, y por la recta:

$$y = h + \left(\frac{1}{4a}\right)$$

Si la parábola se abre hacia la izquierda o hacia la derecha. Aquí, (h,k) representa las coordenadas del vértice de la parábola.

Definición de lado recto.

El lado recto es otra característica importante de la parábola. Este se define como la porción de la recta perpendicular al eje de la parábola, que pasa por el foco y es cortada por la curva en dos puntos simétricos en el eje.

En la ecuación de la parábola, la longitud del lado recto es igual a la distancia entre la parábola y su directriz, medida perpendicularmente, y se puede calcular mediante la fórmula:

$$\text{lado recto} = \frac{1}{a}$$

donde "a" es el coeficiente que determina la "abertura" de la parábola en su ecuación estándar.
La gráfica de las funciones polinómicas de segundo grado o funciones cuadráticas son las parábolas:

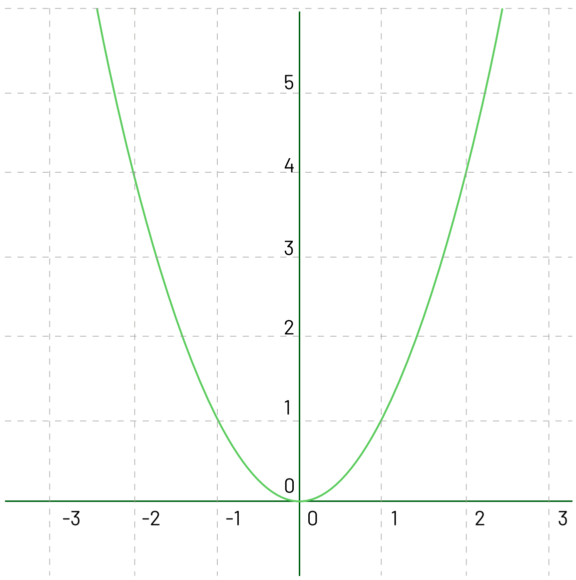


Figura 3: Representación de la parábola de una función polinómica. Elaboración propia.

Una parábola es un gráfico en forma de U. Las ecuaciones cuadráticas poseen gráficos que son parábolas.

A continuación, se muestra una ecuación cuadrática.

$$y = x^2 - 2$$

Las ecuaciones elevadas a la 2° potencia reciben el nombre de ecuaciones cuadráticas y sus gráficos siempre son parábolas.

El gráfico de una parábola puede cambiar de posición, dirección y ancho, basado en los coeficientes de x^2 y x además de la constante. Debido a que esos pedazos de la ecuación son tan importantes, los nombramos en lo que se conoce como la forma estándar.

La forma estándar de una ecuación cuadrática:

$$y = ax^2 + bx + c$$

(donde a debe ser distinta de cero). Note que a, b y c serán coeficientes y pueden ser positivos o negativos. Esto también afectará a la parábola graficada.

Una vez más, el valor de a puede predecir dos cosas:
1) Cuán ancho será el gráfico.
2) Si el gráfico se abre hacia arriba o hacia abajo.

Generalmente, mientras más lejos de cero se encuentre el valor de a más angosto es el gráfico; mientras más cerca de cero se encuentra el valor de a, más ancho es el gráfico. Además, un valor positivo de a nos dará un gráfico que se abre hacia arriba, mientras que un valor negativo de a nos dará un gráfico que se abre hacia abajo.
¿Qué pasa con el valor de b?

Podrías haber notado que todas las parábolas son simétricas, son iguales a ambos lados, como si se reflejaran en un espejo que estuviera justo en el medio del gráfico.

Esta recta de reflexión recibe el nombre de eje de simetría.

El valor de b nos ayuda a predecir el eje de simetría.

Finalmente, el valor de c determina el intercepto en y nos dice dónde el gráfico tocará el eje y. Cuando el valor de **c** era 3, el gráfico cruzó el eje y en el punto 3.

Observemos algunos gráficos:

Características del gráfico	**Gráfica de la parabola**

Gráfico A.

- La parábola se abre hacia arriba.
- Es bastante ancho.
- Es simétrico en el eje y.
- Intercepta en y en 3.
- La ecuación es: $y=\frac{1}{2}x^2+3$
- $a=\frac{1}{2},\ b=0,\ c=3$

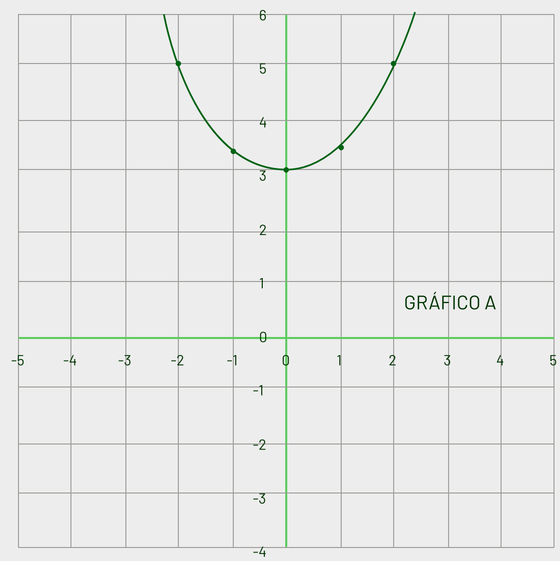


Gráfico B.

- La parábola se abre hacia abajo.
- No es estrecho ni ancho.
- La simetría está en la derecha del eje y,
- Intercepta en y en 2.
- La ecuación es: $y=-x^2+x+2$
- $a=-1, b=1, c=2$

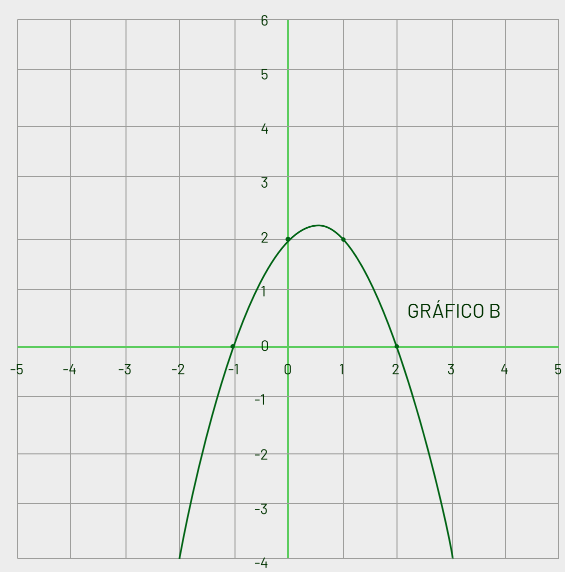


Gráfico C.

- La parábola se abre hacia arriba.
- Es bastante estrecho.
- Es simétrico en el eje y,
- Intercepta en y en -3.
- La ecuación es: $y = x^2 - 3$
- $a=2, b=0, c=3$

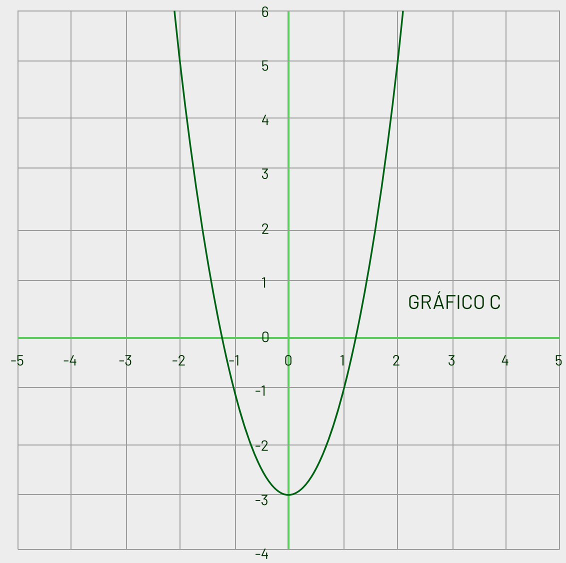


Tabla 1: Tipos de parábolas según sus caracteristicas. Elaboración propia.

Ecuación de la elipse

Una elipse es una curva cerrada en forma de óvalo. Es el lugar geométrico de todos los puntos de un plano, tales que la suma de sus distancias a dos puntos fijos llamado focos, siempre es constante. A esta longitud constante se le denomina eje mayor que puede ser paralelo al eje "x", paralelo al eje "y" o bien oblicuo.

Matemáticamente, si los focos de la elipse están ubicados en los puntos $(h,k \pm c)$ en el plano cartesiano, y el valor de la constante es 2a, entonces la ecuación de la elipse se puede escribir de la siguiente forma:
Si la elipse está orientada horizontalmente:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

Donde:

$$b^2 = a^2 - c^2$$

Si la elipse está orientada verticalmente:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

Donde:

$$b^2 = a^2 - c^2$$

En estas ecuaciones, (h,k) representa el centro de la elipse, a es la distancia desde el centro de la elipse a uno de los vértices, y b es la distancia desde el centro de la elipse al otro vértice; c es la distancia desde el centro de la elipse a uno de los focos.

Elementos de la ecuación de la elipse.

Los siguientes elementos se encuentran en cada elipse:

- **Centro:** es el punto de intersección de los ejes. Es, además, centro de simetría.
- **Eje principal o focal:** es el eje en el que se encuentran los focos. Es un eje de simetría.
- **Eje secundario:** es el eje perpendicular al eje principal, mediatriz del segmento que une los focos.
- **Vértices:** puntos de intersección de la elipse con los ejes.
- **Distancia focal:** distancia entre los focos. Su longitud es $2 * c$.
- **Semi distancia focal:** distancia entre el centro y cada foco. Su longitud es c.
- **Semieje mayor o principal:** segmento entre el centro y los vértices del eje principal. Su longitud es a.
- **Semieje menor o secundario:** segmento entre el centro y los vértices del eje secundario. Su longitud es b y cumple $b=\sqrt{(a^2-c^2)}$
- **Radios vectores:** cada punto de la elipse cuenta con dos radios vectores que son los segmentos que unen dicho punto a cada uno de los focos. Para un punto $P(x,y)$ se cumple que:
- $d(P,F) = a - e\cdot x$ y $d(P,F') = a + e\cdot x$

Ecuación de eje mayor horizontal centrada en un punto cualquiera $P(x_0, y_0)$

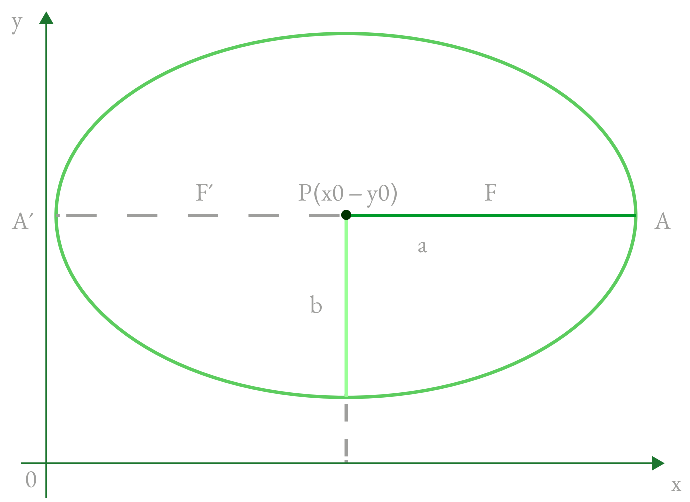


Figura 4: Representación de la elipse horizontal centrada en un punto cualquiera $P(x_0, y_0)$. Elaboración propia.

La ecuación de una elipse, cuyo eje mayor es horizontal, viene dada por:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

Donde:

- $x0, y0$: coordenadas x e y del centro de la elipse.
- a: semieje de abscisas.
- b: semieje de ordenadas. En nuestro caso debe cumplirse que $b \leqslant a$.

Ejemplo:

Determine la ecuación de la elipse horizontal centrada en el origen cuyo eje mayor horizontal mide 10 y su distancia focal mide 6.

Dado que sabemos que el eje mayor $(2a)$ es 10:

$$2a = 10 \Longrightarrow a = 5$$

Y que la distancia focal $(2c)$ mide 6:

$$2c = 6 \Longrightarrow c = 3$$

Partiendo de estos datos, podemos calcular la longitud del semieje menor (b) por medio de la siguiente ecuación:

$$b^2 = a^2 - c^2 \Longrightarrow b^5 - 3^2 \Longrightarrow b\sqrt{}(25-9) \Longrightarrow b = \pm 4$$

Dado que no puede existir una longitud negativa, nos quedaremos con que $b = 4$. Utilizando ahora la fórmula de la ecuación de una elipse de eje mayor horizontal situada en el punto P_((0,0)) o lo que es lo mismo $x_0 = 0$ e $y_0 = 0$.

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1 \Longrightarrow \frac{(x-0)^2}{5^2} + \frac{(y-0)^2}{4^2} = 1 \Longrightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

Ecuación de eje mayor vertical centrada en un punto cualquiera $P(x_0, y_0)$

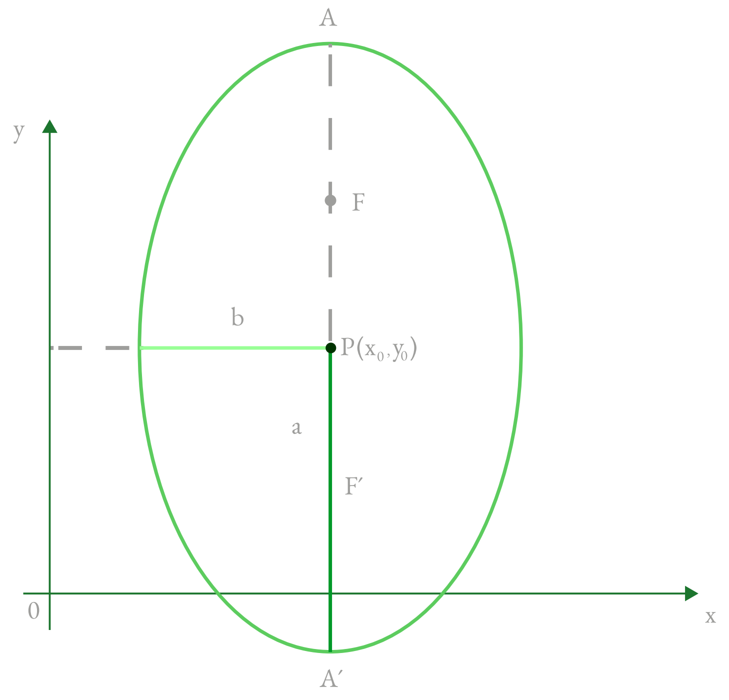


Figura 5: Representación de la elipse vertical centrada en un punto cualquiera $P(x_0, y_0)$. Elaboración propia.

La ecuación de una elipse, cuyo eje mayor es horizontal, viene dada por:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

Donde:

- $x0, y0$: coordenadas x e y del centro de la elipse.
- a: semieje de abscisas.
- b: semieje de ordenadas. En nuestro caso debe cumplirse que $b > a$.

Ejemplo:
Determine la ecuación de la elipse vertical centrada en el punto $P(-1,2)$ y cuyos ejes miden 20 y 16.

Dado que su eje mayor es vertical $(2a)$ y considerando que mide 20, se cumple que:

$$2a=20 \Longrightarrow a=10$$

Asimismo, sabiendo que el eje menor $(2b)$ es 16:

$$2b=16 \Longrightarrow b=8$$

Por último, sabiendo que $a = 10$ y $b = 8$ y que la elipse está centrada en el punto $P_{(-1,2)}$, obtenemos que su ecuación es:

$$\frac{(x-x_0)^2}{b^2}+\frac{(y-y_0)^2}{a^2}=1 \Longrightarrow \frac{(x-(-1))^2}{8^2}+\frac{(y-2)^2}{10^2}=1 \Longrightarrow \frac{(x-1)^2}{64}+\frac{(y-2)^2}{64}=1$$

Excentricidad de la ecuación de la elipse.

La excentricidad nos permite conocer lo alejados que están los focos del centro de la elipse.

$$e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$$

Observe que $0 < e < 1$. Cuando $e \approx 0$ los focos se superponen y la elipse es una circunferencia.

Ejemplo:
Dada la siguiente ecuación de una elipse, determine su excentricidad.

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$$

Sabiendo que la excentricidad e de una elipse se obtiene por medio de la siguiente expresión:

$$e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$$

Y que si observamos la ecuación el mayor valor se encuentra bajo la x, podemos deducir que la elipse posee su eje mayor horizontal. Este tipo de elipses posee la siguiente ecuación general:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1 \Longrightarrow$$

Por tanto:

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \Longrightarrow e = \sqrt{1 - \frac{4}{16}} \Longrightarrow e = \frac{3}{4}$$

Ecuación de la hipérbola

Una hipérbola se define como el lugar geométrico de los puntos del plano en el que la diferencia de distancias a dos puntos fijos denominados focos, F y F', es siempre constante.

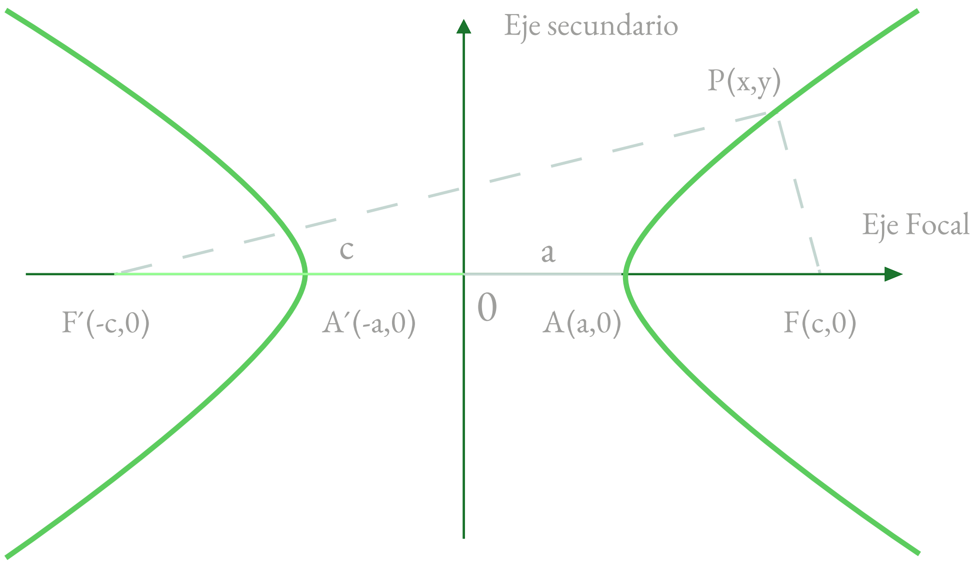


Figura 6: Representación de la hipérbola. Elaboración propia.

Las curvas del gráfico constituyen lo que se conoce como una hipérbola. Observe sus focos F y F'. Estos puntos son muy importantes, por la diferencia de la distancia entre cada punto $P(x,y)$ y estos puntos son siempre constante. Por tanto, debemos considerar que, para cualquier punto de la hipérbola, siempre se cumple que:

$$|d(P,F)-d(P,F')|=2a$$

Donde $d(P,F)$ y $d(P,F')$ es la distancia de un punto genérico P de la hipérbola al foco F y al foco F' respectivamente. Y donde $2a$ es una constante.

Elementos de la hipérbola

En las hipérbolas podemos distinguir ciertos elementos comunes, que se detallan a continuación:

- **Focos** (F y F')**:** puntos fijos en los que la diferencia de distancia entre ellos y cualquier punto de la hipérbola es siempre la misma.
- **Eje focal, principal o real:** recta que pasa por los focos.
- **Eje secundario o imaginario:** mediatriz del segmento que une los dos focos.
- **Centro** (O)**:** punto de intersección de los ejes focal y secundario.
- **Semidistancia focal** (c)**:** la mitad de la distancia entre los dos focos F y F'. Su valor es c.
- **Distancia focal** ($2c$)**:** distancia del segmento que une los dos focos F y F'. Su longitud es $2c$.
- **Los vértices** (A y A')**:** puntos de la hipérbola que cortan al eje focal.
- **Semieje real** (a)**:** segmento que va desde el origen O hasta cualquiera de los vértices A o A'. Su longitud es a.
- **Semieje imaginario** (b): $b = \sqrt{(c^2 - a^2)}$

Ecuación de la hipérbola

De manera general, encontramos dos tipos de hipérbolas: aquellas en las que el eje focal se encuentra horizontal o vertical. De este modo, podemos definir dos tipos de ecuaciones.

Hipérbola de eje focal horizontal centrada en un punto $P(x0,y0)$ cualquiera

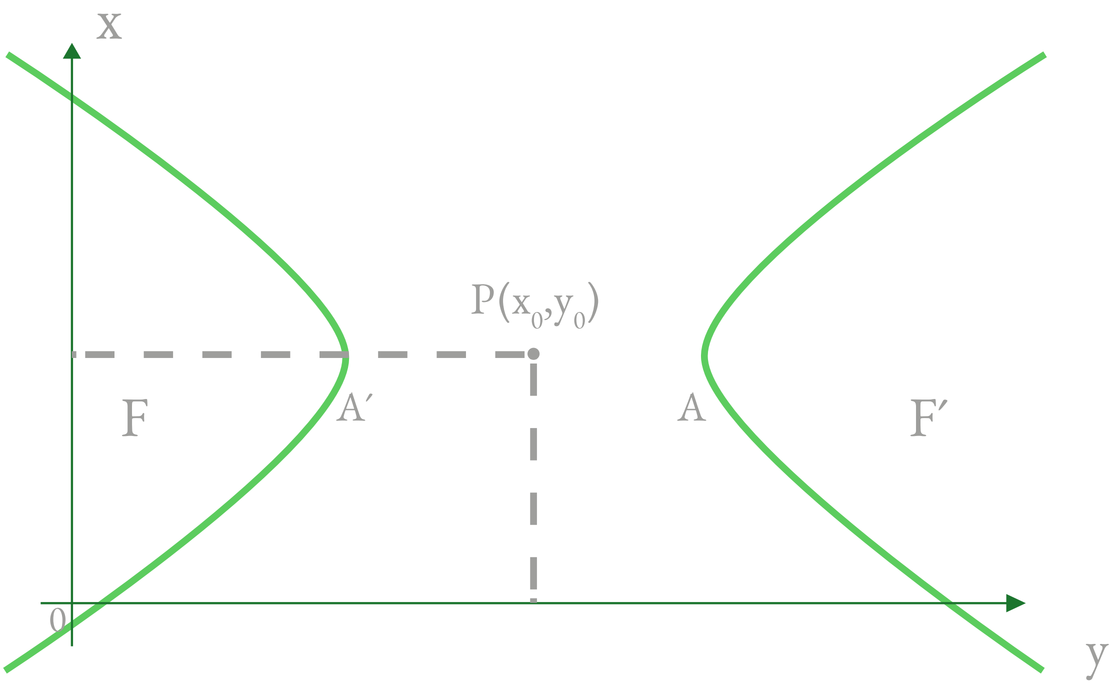


Figura 7: Representación de la hipérbola horizontal centrada en un punto cualquiera $P(x\_0,y\_0)$. Elaboración propia.

La ecuación de una hipérbola de eje focal horizontal viene dada por:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

Donde:

- $x0$, $y0$: coordenadas x e y del centro de la hipérbola.
- a: semieje real.
- b: semieje imaginario.

Ejemplo:
Determine la ecuación de la hipérbola centrada en el punto $P(2,1)$, cuya distancia focal es 10 y la distancia entre sus vértices A es igual a 8.

Sabiendo que la ecuación de una hipérbola centrada en el cualquier punto $P_{(X,Y)}$ debe tener la forma:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

Calcularemos el valor a y b.
Dado que la distancia focal $(2c)$ es 10, tenemos que:

$$2c=10 \Longrightarrow c=5$$

Y dado que la distancia entre los vértices $(2a)$ es 8, obtenemos que:

$$2a=8 \Longrightarrow a=4$$

Para calcular el valor de b, debemos aplicar el teorema de Pitágoras.

$$c^2=a^2+b^2 \Longrightarrow b^2=c^2-a^2 \Longrightarrow b=\sqrt{(5^2-4^2)} \Longrightarrow b=\sqrt{9}\ b=\pm 3$$

Dado que b es una distancia, no puede tener un valor negativo. De ahí que nos quedemos con el valor $b=3$.
Por tanto, la ecuación queda como sigue:

$$\frac{(x-2)^2}{4^2}+\frac{(y-1)^2}{3^2}=1$$

Hipérbola de eje focal vertical centrada en un punto $P(x_0,y_0)$ cualquiera

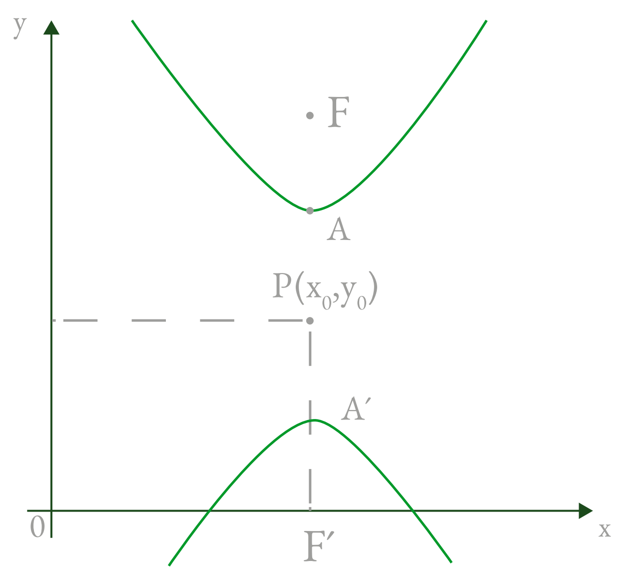


Figura 8: Representación de la hipérbola vertical centrada en un punto cualquieraP(x_0,y_0). Elaboración propia.

La **ecuación de una hipérbola de eje focal vertical** viene dada por:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

Donde:

- $x0, y0$: coordenadas x e y del centro de la hipérbola.
- a: semieje real.
- b: semieje imaginario.

Casos particulares de las hipérbolas

Si las hipérbolas se encuentran centradas en el origen de coordenadas, las ecuaciones anteriores se pueden reducir considerablemente, porque $x0 = 0$ e $y0 = 0$. Considerando este hecho:

Hipérbola de eje focal horizontal centrada en el origen

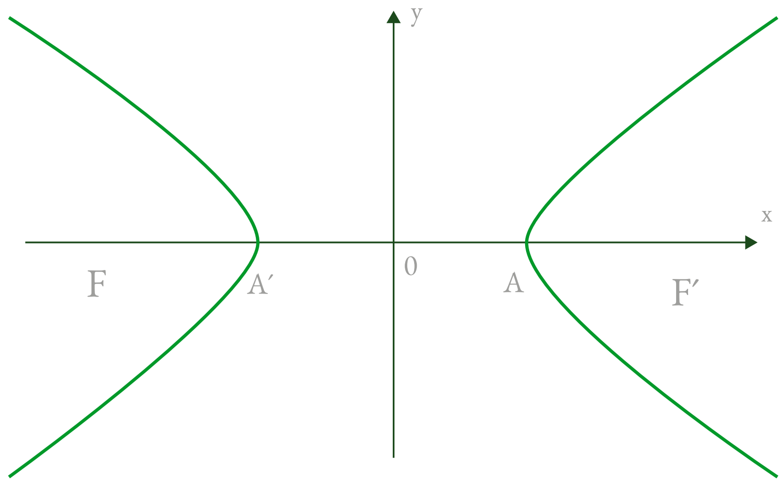


Figura 9: Representación de la hipérbola horizontal centrada en el origen. Elaboración propia.

La **ecuación de una hipérbola de eje focal horizontal centrada en el origen** viene dada por:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

Donde:

- a: semieje real.
- b: semieje imaginario.

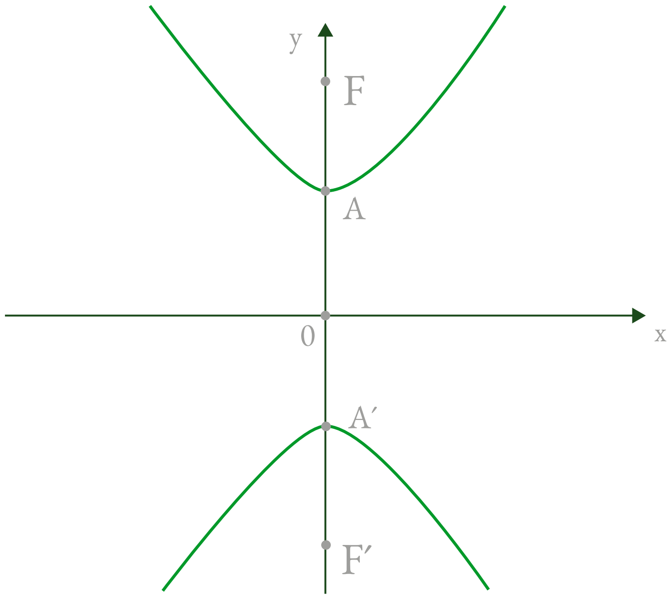


Figura 10: Representación de la hipérbola vertical centrada en el origen. Elaboración propia.

La ecuación de una hipérbola de eje focal horizontal centrada en el origen viene dada por:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

Donde:

- a: semieje real.
- b: semieje imaginario.

Excentricidad de la hipérbola

A partir de la semidistancia focal y el semieje real, es posible obtener un valor numérico que nos indique qué tan "abierta" o "amplia" es una hipérbola. Dicho valor recibe el nombre de excentricidad.

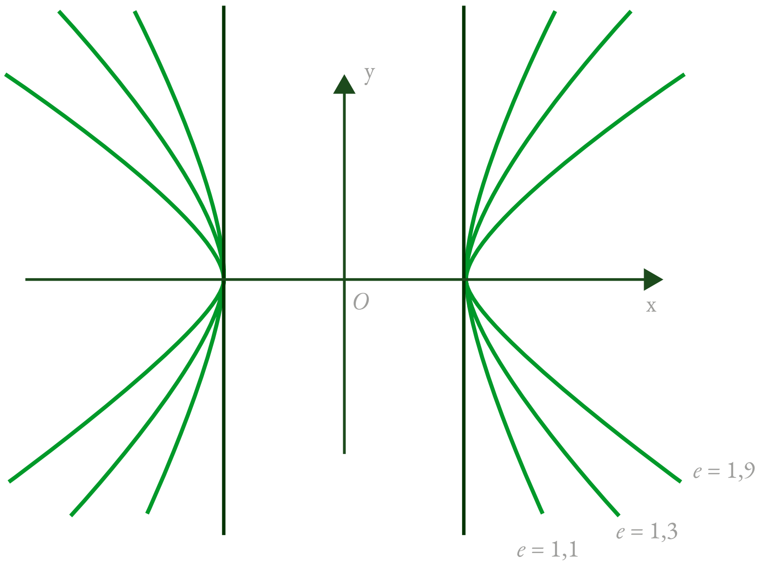


Figura 11: Representación de una excentricidad de la hipérbola. Elaboración propia.

La excentricidad de una hipérbola es el cociente entre su semidistancia focal y su semieje real:

$$e = \frac{c}{a}$$

Donde:

- a: semieje real.
- c: semieje imaginario focal.

Este valor siempre será mayor que 1 y, cuanto mayor sea su valor, más "estrecha" o "cerrada" será la hipérbola.

Ejemplo:
Determine la excentricidad de la hipérbola dada por la siguiente ecuación:

$$\frac{y^2}{25} - \frac{(x-2)^2}{16} = 1$$

Observando la ecuación del enunciado, podemos deducir que se trata de una hipérbola de eje focal vertical centrada en $P_{(2.0)}$, en la que $a^2 = 25$ y $b^2 = 16$.

Dado que la excentricidad e de cualquier hipérbola se obtiene por medio de la siguiente expresión:

$$e = \frac{c}{a}$$

Calcularemos la semidistancia focal c. Para ello sabemos que:

$$c^2 = a^2 + b^2 \Longrightarrow c^2 = 25 + 16 \Longrightarrow c^2 = 41 \Longrightarrow c = \pm\sqrt{41}$$

Dado que c es una distancia, solo puede tener un valor positivo y ese es el que tomaremos para calcular la excentricidad:

$$e = \frac{\sqrt{41}}{5} \Longrightarrow e \approx 1{,}28$$

Problemas de planteo que involucren cónicas

Problema 1.

Sea una circunferencia CIR_1 definida por la ecuación:

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y + 12 = 0$$

Basándonos en ello:

a) Determine la ecuación en forma general de la circunferencia CIR_2, concéntrica con CIR_1, cuyo diámetro sea igual al doble del diámetro de CIR_1.

b) Represente ambas circunferencias en un solo gráfico.

Solución:

a) A partir de la ecuación que define a CIR_1 es factible obtener:

$$x^2 + 4x + 4 + y^2 – 6y + 9 = -12 + 4 + 9 \quad y \quad (x+2)_2 + (y-3)^2 = (1)^2$$

o sea que el radio de dicha circunferencia es igual a 1, en tanto que su centro es $C_{1(-2,3)}$, debido a lo cual el radio de CIR_2 es $R_2 = 2(1) =2$, correspondiendo a esta circunferencia la ecuación:

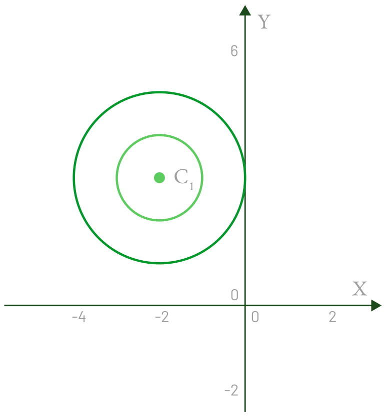
$$(x+2)^2 + (y-3)^2 = (1)^2$$

de donde puede obtenerse:

$$x^2 + 4x + 4 + y^2 – 6y + 9 = 0$$

que es la ecuación que se pidió determinar.

b)



Problema 2.

Dada la cónica de ecuación:

$$y^2 + 4y + 12x – 44 = 0...©$$

a) Lleve esa igualdad a una de las segundas formas ordinarias de la ecuación de una parábola.

b) Diga dónde se encuentra su vértice y cuál es la longitud de su ancho focal; además, obtenga: la distancia de V al foco (F) y a la directriz (L), las coordenadas de F, y una ecuación que defina a la directriz de la curva.

c) Determine las coordenadas de los puntos extremos del eje focal (el punto f y * f) de la curva dada, y las de los puntos M y N donde esta corta al eje Y; después de ello, represente gráficamente a la cónica de este ejemplo, haciéndola pasar por V, así como por los cuatro puntos recién citados.

a) La ecuación dada puede escribirse en la forma:

$$y^2 + 4y = -12x + 44.$$

Y completando cuadrados:

$$y^2 + 4y + 4 = -12x + 44 + 4,$$

Igualdad que da lugar a la expresión:

$$(y+2)^2 = -12(x-4)...(E).$$

La cual es una segunda forma ordinaria de la ecuación de la parábola, de tipo:

$$(y – k)^2 = -4p(x-h)...[FO_2\ P_{hi}]$$

b) Considerando (E) y $[FO_2\ P_{hi}]$, puede decirse que la parábola de este ejemplo corresponde lo siguiente: V(h,k), donde h=4,k=2; 4p=12=longitud del ancho focal ; F(4-3,-2), o sea F(1,-2). Y directriz definida por:

$$x=h+p$$

Es decir, por:

$$x=4+3 \quad \text{o por} \quad x=7$$

O bien por la ecuación:

$$x-7=0$$

Porque,

$$[FO_2\ P_{hi}]$$

Corresponde a una parábola cuyas ramas abren hacia la izquierda, con foco ubicado "p" unidades a la izquierda de V, así como una directriz también ubicada a "p" unidades, pero de la derecha de V.

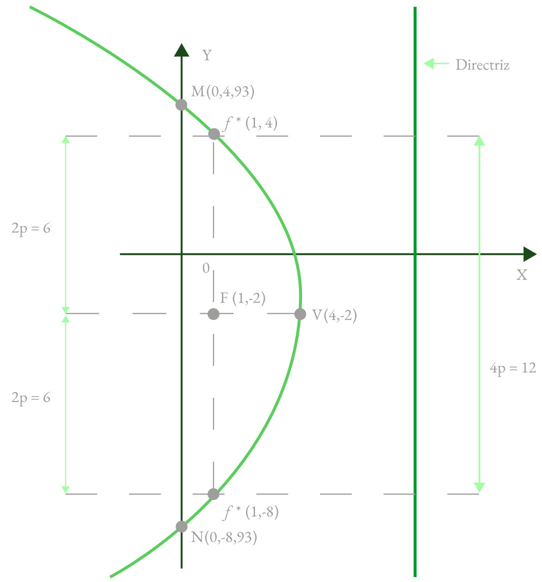
c) Procediendo en forma similar a la seguida para obtener lo expresado en AF, puede establecerse que f(h- p,k 2p), y, f *(h– p, k – 2p), son los puntos extremos del eje focal de las parábolas definidas por $[FO_2\ P_{hi}]$, lo que implica que, para la parábola de este ejemplo se tengan:

$$f(4\text{-}3,\text{-}2+6) \text{ y } f^*(4\text{-}3,\text{-}2\text{-}6), \text{ es decir, } f(1,4) \text{ y } f^*(1,\text{-}8)$$

con lo cual quedan determinadas las coordenadas pedidas, de los puntos extremos del eje focal.
Como además se pidió obtener las coordenadas de los puntos M y N , donde la curva dada corta al eje Y , esas coordenadas las determinaremos basándonos en que dichas coordenadas deben cumplir la ecuación cartesiana © por medio de la cual se definió a la cónica (de este ejemplo), o bien la ecuación (E), que también define a dicha cónica, considerando que la abscisa de ambos puntos vale cero, debido a que dichos puntos pertenecen al eje Y.

Al hacer x=0, en (E), obtenemos $(y+2)^2 = 48y, + 2$
$y = -2 + 6.93 = 4.93 = y_M$ por lo que se tiene M (0,4,93)
$y = -2 - 6.93 = -8.93 = y_N$ lo que implica N (0,-8,93)

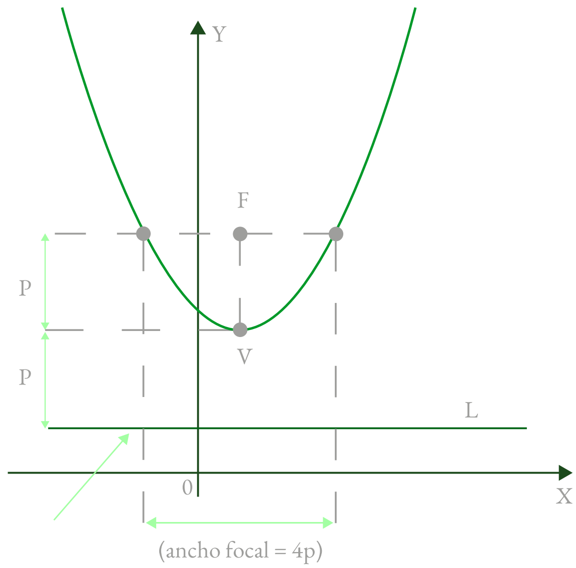
Quedando así definidas las coordenadas de M y de N, que se pidieron.
Para terminar este ejemplo, acorde con lo pedido, se representó gráficamente la cónica, de este ejemplo, haciéndola pasar por M,f,V, f * y N. Como se observa en el siguiente gráfico:



Enseguida estableceremos otras dos formas ordinarias de la ecuación de una parábola.
Procediendo en forma similar a la seguida, para llegar a la expresión $[FO_2\ P_{hi}]$, es factible obtener:

$$(x - h)^2 = 4p(y - k)\ldots[FO^2\ P_{var}]$$

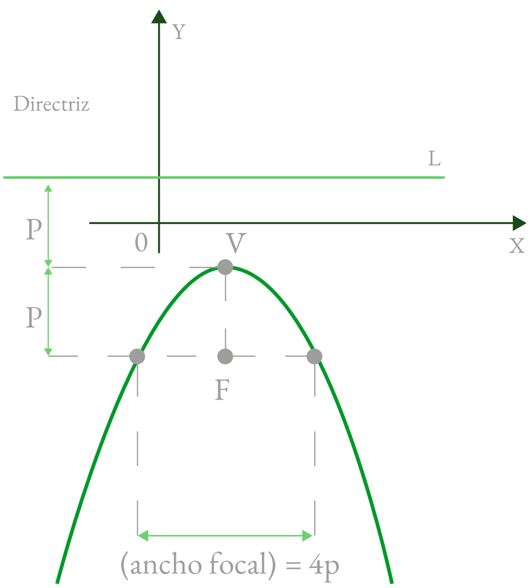
Expresión conocida como segunda forma ordinaria de ecuación de una parábola cuyas ramas abren hacia arriba, con vértice en $V(h\ k,)$ distante "p" tanto de su foco (F) como de su directriz (L), con eje focal paralelo al eje Y, su foco arriba de V, su directriz localizada abajo del vértice, y un ancho focal de magnitud igual a $4\,p$, como se ilustra a continuación:



De proceder similarmente a lo hecho para obtener la expresión $[FO_2\ P_{hi}]$, es posible establecer:

$$(x\text{-}h)^2 = \text{-}4p(y\text{-}k)\ldots[FO_2\ P_{vab}],$$

expresión que comúnmente se conoce como segunda forma ordinaria de la ecuación de una parábola cuyas ramas abren hacia abajo, como la mostrada en la gráfica siguiente:



Es decir, con vértice en $V(h\ k,)$ distante "p" tanto de su foco (F) como de su directriz (L), con su eje focal paralelo al eje Y, su foco localizado abajo de V, su directriz ubicada arriba del vértice, y un ancho focal de magnitud igual a $4\,p$.

Referencias

Márquez A., Bravo F., Gallegos H., Villegas M., Figueroa R. (2009). Geometría analítica. (1ra ed.). Pearson Educación.

Raichman S. (2016). Geometría analítica para ciencias e ingeniería. Universidad Nacional de Cuyo. https://bdigital.uncu.edu.ar/objetos_digitales/7224/librogeoing.pdf

Sullivan M. (2002). Precálculo. (4ta ed.). México: Pearson Prentice Hall Hispanoamericana.

Swokowski E., Cole J. (2011). Álgebra y trigonometría (13a ed.). México, Cengage Learning.